

## 7 大家一起來猜數字

俗語說“路遙知馬力，日久見人心”，“知人知面不知心”。可見想瞭解一個人的心裡想甚麼是很困難的一件事。這節的謎題就是想藉著 43, 57 這兩個數字，來猜透一個人心裡所想的數字。過程是這樣的：

你在心裡想一個小於 50 的正整數（可別說出來哪個數），且從 43, 57 這兩數中選一個數（同樣不說出選哪一個數）。然後將心裡想的數與選的數相乘（例如：（表一）是你心裡想的數為 38，選的數為 43 所得到的計算結果；（表二）則是你心裡想的數為 46，選的數為 57 所得到的計算結果）。

	想的數	38	
×)	選的數	43	
<hr/>			
		114	
		152	
<hr/>			
		1634	末兩位數

（表一）

	想的數	46	
×)	選的數	57	
<hr/>			
		322	
		230	
<hr/>			
		2622	末兩位數

（表二）

如果你只告訴我計算結果的末兩位數，那我一定能夠很快的猜透你心裡所想的數字及你選的數字。你能知道其中的玄機嗎？

【解答】一個數字的末兩位數剛好就是對這個數字模 100 所得到的餘數。因此假設你心裡想的數字為  $S$ , ( $1 \leq S < 50$ )。

(1) 如果你選的數字為 43，則將相乘得到的末兩位數再乘以 7 得到

$$\begin{aligned}(S \times 43 \text{ 的末兩位數}) \times 7 &\equiv S \times 43 \times 7 \text{ 的末兩位數} \pmod{100} \\ &\equiv 300S + S \pmod{100} \\ &\equiv S \pmod{100}.\end{aligned}$$

所得到的新末兩位數為  $S$ （剛好是你心裡想的數）。

(2) 如果你選的數字為 57，則將相乘得到的末兩位數再乘以 7 得到

$$\begin{aligned}
(S \times 57 \text{ 的末兩位數}) \times 7 &\equiv S \times 57 \times 7 \text{ 的末兩位數} \pmod{100} \\
&\equiv 100(4S - 1) + (100 - S) \pmod{100} \\
&\equiv 100 - S \pmod{100}.
\end{aligned}$$

所得到的新末兩位數為  $100 > 100 - S > 50$  ( $S = 100 - (100 - S)$  剛好是你心裡想的數)。

因此我們得到的結論是：將你相乘得到的末兩位數再乘以 7，並取它的末兩位數為新的末兩位數。如果這所得的新末兩位數不超過 50，則你心裡想的數為此新末兩位數，所選的數為 43；否則你心裡想的數為 100 減去此新末兩位數，所選的數為 57。

將 (表一)、(表二) 的情形驗算如下：

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;"></td> <td style="text-align: right;">34 末兩位數</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">×)</td> <td style="text-align: right;">7</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="border-top: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: right;">238 新末兩位數</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center; padding-top: 10px;">選 43, 想 38</td> </tr> </table>		34 末兩位數	×)	7				238 新末兩位數	選 43, 想 38		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;"></td> <td style="text-align: right;">22 末兩位數</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">×)</td> <td style="text-align: right;">7</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="border-top: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: right;">154 新末兩位數</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: right;">100 - 54 = 46</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center; padding-top: 10px;">選 57, 想 46</td> </tr> </table>		22 末兩位數	×)	7				154 新末兩位數		100 - 54 = 46	選 57, 想 46	
	34 末兩位數																						
×)	7																						
	238 新末兩位數																						
選 43, 想 38																							
	22 末兩位數																						
×)	7																						
	154 新末兩位數																						
	100 - 54 = 46																						
選 57, 想 46																							

習題 7.1 如果將選的數字 43,57 改成 33,67，那你知道如何應付嗎？

習題 7.2 你是否會設計像本謎題的猜數字問題？

習題 7.3 阿三在心裡想一個不超過 500 的正整數，且從 143,857 這兩數中選一個數，然後將心裡想的數與選的數相乘，結果此乘數的末三位數為 231。你能推敲阿三想的數字及選的數字為何嗎？

習題 7.4 曉明心裡想一個小於 100 的正整數，他將此數除以 9，並將所得的餘數再乘以 55，得到第一個數；又將此心裡想的數除以 11，並將所得的餘數再乘以 45，得到第二個數。曉明只告訴我們，這兩個數的和是 335，你能猜到曉明心裡想的數嗎？

習題 7.5 一個小國家的地牢裡關著三名囚犯，他們原本是數學家，但因觸怒了國王而被關入地牢。這一天國王心情不錯，把三名囚犯叫到跟前來，跟他們說：這裡有五頂帽子，三黑兩白，我要任意讓你們各戴上一頂，你們只能看到別人頭上的帽子，但是看不到自己頭上的帽子，也看不到剩下的帽子。如果有人能說出自己頭上的帽子顏色，我就當場赦他無罪！但是如果說錯了，就立刻拉出去處死！如果沒有人說得出，就通通再關回去。三個囚犯戴著帽子之後，起先個個噤若寒蟬，面面相覷，沒有人敢說一句話。過一會兒，突然有一個囚犯知道自己頭上帽子的顏色了。請問他戴的是什麼顏色的帽子，並說明理由。(這是一則很適合考驗中學生思考能力的數學遊戲，你可以試著做這樣的五頂帽子，讓學生來玩這個遊戲，也就是讓學生動手玩數學)

習題 7.6 港警所接到一則檢舉電話：有一艘將要啟航的貨櫃輪上，有一只貨櫃裝有違禁品，並給了一個數  $50\frac{9}{11}$ 。根據警方人員的調查，這艘船上的貨櫃編號為  $1, 2, 3, \dots$  之連續正整數。檢警人員研判，這個數  $50\frac{9}{11}$  應是剔除藏有違禁品那只貨櫃外，其他所有貨櫃編號的算術平均數。根據這些研判，辦案人員藉由準確的計算找到了這個藏有違禁品的貨櫃的編號。你知道共有多少只貨櫃在這艘船上嗎？藏違禁品的貨櫃編號是幾號嗎？

### 動手玩數學

設甲、乙、丙、丁四人參加一項考試，其中是非題共有七題，每道題答對得 1 分，不答得 0 分，答錯倒扣 1 分。下表記錄著每個人的答題情形（空白代表此人該題未答），已知甲、乙、丙、丁四人在是非題部分都得到兩分，試由此推知各題的正確答案並加以說明。

題目 \ 考生	甲	乙	丙	丁
第一題	○	○		X
第二題		X	○	X
第三題	X	○	X	X
第四題	○	○	X	○
第五題	X	X	○	○
第六題	○	X	X	
第七題	○		○	X
得分	2	2	2	2

### 挑戰題

算命仙程大位<sup>7</sup> 擅長猜測算命者的年齡，而且屢試不爽。他的伎倆是這樣的：首先請算命者將他的年齡分別除以 3, 5 及 7, 得到三個餘數，然後將此三個餘數分別乘以 70, 21 及 15，最後將得到的三個乘數相加。算命者只要告訴程大位最後相加的總數，程大位便立刻得知算命者的確實年齡。你知道算命仙程大位是如何得到的嗎？

<sup>7</sup>程大位是《算法統宗》的作者，此題改編自他的口訣「三人同行七十稀，五樹梅花二一枝，七子團圓月正半，除百零五便得知」。

### 矩形的邊長猜想

這是有關矩形的一則很有名的問題。儘管已經被很多數學家解決了，但是如果有好的證明方法，還是值得寫下來。問題是這樣的：如果你手邊有許多（當然是有限）各式各樣的小矩形（同一長、寬的小矩形可以超過一個以上）。這些小矩形有一個特色就是每個小矩形至少有一邊的長度是正整數。有一天奇蹟發生了，你兒子將這些小矩形拼湊出一個大矩形來（沒有重疊及空隙發生）。

之後，你兒子拿著直尺去量他拼湊出來的大矩形，竟然發現這個大矩形也有一邊的長度是正整數。你同意你兒子這個偉大的發現嗎（也就是說，如果可以拼出大矩形的話，則大矩形的邊長至少有一邊的長度亦為整數）？